

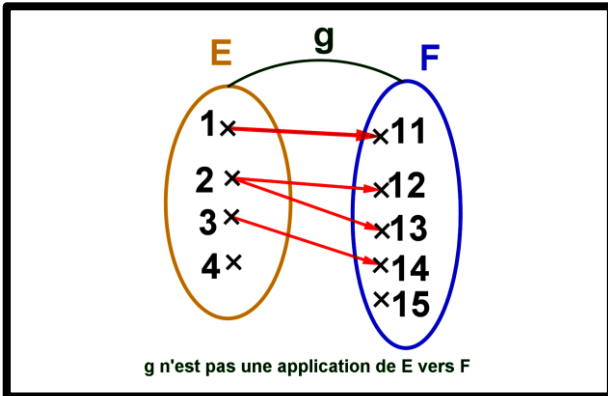
I. GENERALITES :

A. Application :

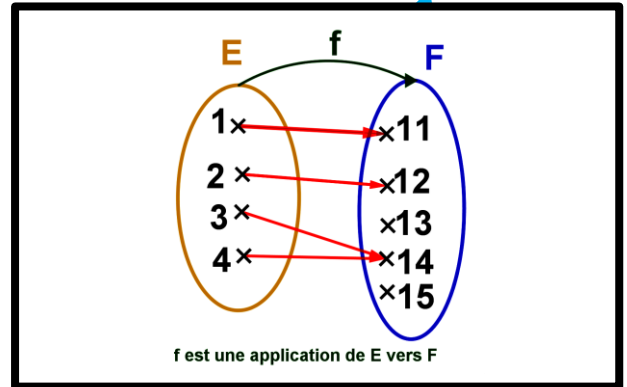
a. Activité :

- On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{11, 12, 13, 14, 15\}$.
- On considère la relation f (ou g) qui associe élément de E par un élément de F voir figures

Cas N° 1



Cas N° 2



Que remarquez vous ?

b. Vocabulaire :

- La relation f est appelée application de E vers F on note f ou g ou h .
- L'ensemble E est appelé ensemble de départ (ou de source)
- L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivé (ou de but)
- Elément de E on le note par x et on l'appelle antécédent .
- Elément de F on le note par y et on l'appelle image .
- L'application f qui associe x par y pour cela on note $f(x) = y$.
- On résume ce qui précède par : $f : E \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x) = y$$

c. Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides .

Toute relation f qui associe chaque élément x de E par un et un seul élément y de F est appelée

application de E vers F , on la note par : $f : E \rightarrow F$ ou encore $f : E \rightarrow F$
 $x \mapsto f(x) = y$

d. Remarque :

- Toute fonction est une application de son ensemble de définition D_f vers \mathbb{R} .
- Toute application $f : E \rightarrow F$ est une fonction de $f : E \rightarrow F$.
- Si $F = E$ on dit que f est une application dans E .
- Soient f et g deux applications tel que :

$$f : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad g : E' \rightarrow F' \quad \text{sont égales si et seulement} \quad \left. \begin{array}{l} E = E' \wedge F = F' \\ \forall x \in E : f(x) = g(x) \end{array} \right\}$$

On note $f = g$

e. Applications :

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

❖ On considère l'application : $n \mapsto f(n) = |n|$

1. Déterminer les images de 0 et -2 et 3.

2. Déterminer les antécédents de 1 et 0 et 3.

3. Est-ce que l'implication $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$ est vraie ?

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

❖ On considère l'application :

$$(n, m) \mapsto f((n, m)) = n \times m$$

1. Déterminer les images de $(1, 0)$ et $(2, -3)$ et $(-6, 1)$.

2. Déterminer les antécédents de 1 et 6 et 0.

3. Est-ce que pour tout (n, m) et (n', m') de \mathbb{N}^2 , l'implication

$$f((n, m)) = f((n', m')) \Rightarrow (n = n' \text{ et } m = m') \text{ est vraie ?}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

❖ On considère les deux applications :

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} \text{ et}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x^2 - 1$$

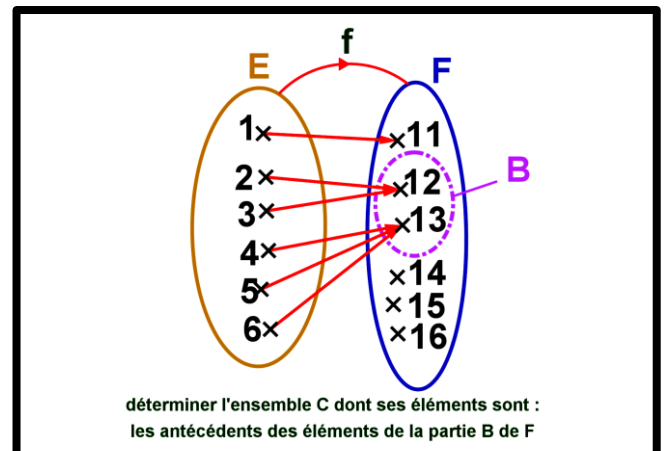
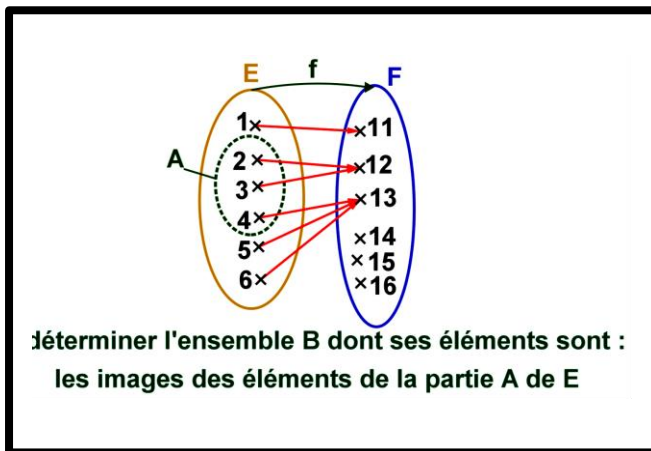
1. Est-ce que $f = g$?

B. L'image directe d'une partie A de l'ensemble de départ - L'image réciproque d'une partie B de l'ensemble d'arrivé.

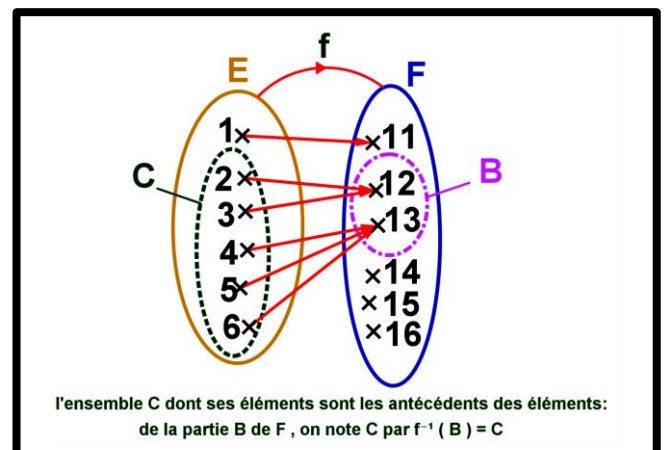
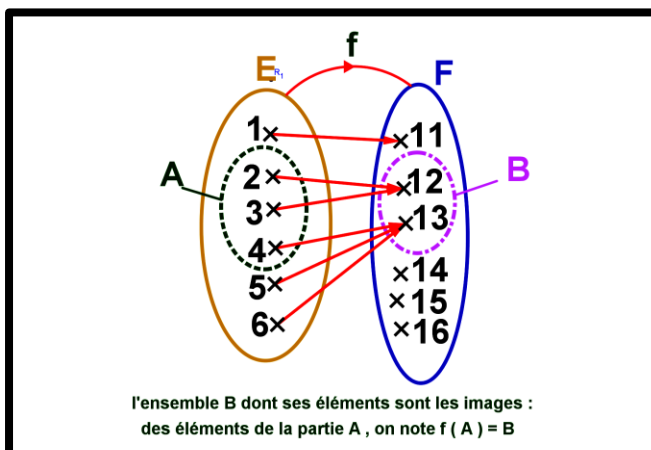
a. **Activité :** on considère l' applications suivante :

1. déterminer la partie B de F tel que ses éléments sont :
les images des éléments de A

2. déterminer la partie C de E tel que ses éléments sont :
les antécédents des éléments de B



b. Réponse :



c. **Vocabulaire :**

1 la partie $B = \{12, 13\}$ est appelée **l'image directe** de la partie A de l'ensemble de départ E et on note : $B = f(A)$

et on a $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

2 la partie $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ est appelée **l'image réciproque** de la partie B de l'ensemble d'arrivée E et on note : $C = f^{-1}(B)$

et on a : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

d. **Définitions :****Définition 1 : (l'image directe)**

$f : E \rightarrow F$ est une application et A est une partie de E ($A \subset E$).

Les images des éléments de la partie A de E constitue une partie B de F est appelée image directe de A et on note $B = f(A)$ ou encore $B = f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subset F$.

D'où : $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$.

Définition 1 : (l'image réciproque)

$f : E \rightarrow F$ est une application et B est une partie de F ($B \subset F$).

Les antécédents des éléments de la partie B de E constitue une partie C de E est appelée image **réciproque** de B ou encore $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E$.

D'où : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

e. **Application :**

❖ On considère l'application suivante : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto f(n) = 2n$

1. Déterminer $f(\{0, 1, 2, 5\})$ et $f^{-1}(\{4, 6, 12\})$.

2. Déterminer : $f(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}) = f^{-1}(2\mathbb{N})$.

3. Est-ce que l'implication suivante est vraie: $\forall n, n' \in \mathbb{N} : f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$.

❖ On considère l'application suivante : $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $X = (a, b) \mapsto f(X) = f((a, b)) = a$

1. Déterminer $f((2, 1))$ et $f((2, 7))$.

2. Ecrire en compréhension $f^{-1}(\{2\})$ (c.à.d. ensemble des antécédents de 2) :

3. Est-ce que l'implication suivante est vraie:
 $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall (a', b') \in \mathbb{N}^2 : f((a, b)) = f((a', b')) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$.

f. **Propriétés :**

- $f : E \rightarrow F$ est une application
 - A et B deux parties d'un ensemble E (de départ). C et D deux parties d'un ensemble F (d'arrivée)
1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
 2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
 3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
 4. $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
 5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

$$6. f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

g. **Démonstration :**

$$1. \text{ Montrons que : } A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

On a $A \subset B$ et on démontre que $f(A) \subset f(B)$.

Soit $y_A \in f(A)$

$$\text{D'où } y_A \in f(A) \Leftrightarrow \exists x_A \in A / y_A = f(x_A) \quad (1)$$

Donc : $(1) \Rightarrow \exists x_A \in B / y_A = f(x_A)$ (car $A \subset B$).

Par suite : $f(x_A) \in f(B)$.

Conclusion : $f(A) \subset f(B)$.

$$2. \text{ Montrons que : } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

- D'abord , on montre que : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Soit y de $f(A \cup B)$ donc il existe $x \in A \cup B$ tel que : $y = f(x)$.

D'où : $x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$

$$\Rightarrow (f(x) \in f(A) \text{ et } f(x) \in f(B))$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$

Conclusion 1 : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

- Montrons que : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On a : $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$ (d'après 1).

$$B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$$

donc : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Conclusion 2 : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Conclusion : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

$$3. \text{ Montrons que : } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Soit y de $f(A \cap B)$ donc il existe $x \in A \cap B$ tel que : $y = f(x)$.

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ et } f(x) \in f(B)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$

Conclusion : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$4. \text{ Montrons que : } C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D).$$

Soit : x de $f^{-1}(C)$

$$x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$$

$$\Rightarrow f(x) \in D \quad ; \quad (C \subset D)$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(D)$$

Conclusion : $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

5. Montrons que : $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

- D'abord , on montre que : $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

On a : $\left. \begin{array}{l} A \cap B \subset A \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \\ A \cap B \subset B \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B) \end{array} \right\}$ donc : $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

- Montrons que : $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$

Soit x de $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

$$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D).$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \cap D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$$

D'où : $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$

Conclusion : $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

6. Montrons que : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

- D'abord , on montre que : $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

On a : $\left. \begin{array}{l} A \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B) \\ B \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B) \end{array} \right\}$ donc : $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$

Conclusion 1 : $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$

- Montrons que : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Soit x de $f^{-1}(C \cup D)$

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D$$

1^{er} cas $f(x) \in C$

Donc : $x \in f^{-1}(C)$ et on sait que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

2^{ème} cas : $f(x) \in D$

Donc : $x \in f^{-1}(D)$ et on sait que $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Pour les deux cas on a : $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Par suite : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Conclusion 2 : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Conclusion : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Remarque : on peut démontrer que par les équivalences successives .

C. Restriction d'une fonction – prolongement d'une fonction :

a. **Activité :** On considère les deux applications : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = |x| - 5x$ et $x \mapsto f(x) = -4x$.

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$

2. Quelle relation relie les deux fonctions .

Réponse pour la 2^{ème}

Relations :

- $[0, +\infty[\subset \mathbb{R} .$
- $\forall x \in [0, +\infty[, g(x) = f(x)$

b. Vocabulaire :

- L'application g restreint à donner les images des x de $[0, +\infty[$; pour cela l'application g est appelé restriction de f sur $[0, +\infty[$.
- l'application f est appelé prolongement de g sur \mathbb{R} . (f continue à donner les images x de $]-\infty, 0[$ car g est définie juste sur $[0, +\infty[$) .

c. définition 1 :

$f : E \rightarrow F$ est une application et B est une partie de F ($B \subset F$) .

Toute application g tel que :

1. Ensemble de départ est une partie A de E ($A \subset E$) .
2. $\forall x \in A : g(x) = f(x)$.

l'application g est appelée restriction de f sur A . donc :

$$g : A (A \subset E) \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

d. définition 2 :

$f : E \rightarrow F$ est une application et B est un ensemble tel que $E \subset B$.

Toute application h tel que :

3. Ensemble de départ est B avec ($E \subset B$) .
4. $\forall x \in E , h(x) = f(x)$.

l'application h est appelée prolongement de f sur B . donc :

$$\begin{cases} x \in E , h(x) = f(x) \\ x \in B \setminus E , h(x) = h(x) \end{cases}$$

e. Remarque : prolongement n'est pas unique

f. Application :

❖ On considère les deux applications :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x| - 5x \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x) = -4x$$

1. Est-ce que l'application g est une restriction de f sur $[0, +\infty[$

❖ On considère les applications :

$$f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x^3 \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x) = -4x$$

2. Est-ce que l'application g est un prolongement de f sur \mathbb{R} ?

avec :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = -2x^4 + 2x^3 |x+1|$$

II. APPLICATION : INJECTIVE – SURJECTIVE – BIJECTIVE ET LA BIJECTION R2CIPROQUE :

A. APPLICATION INJECTIVE

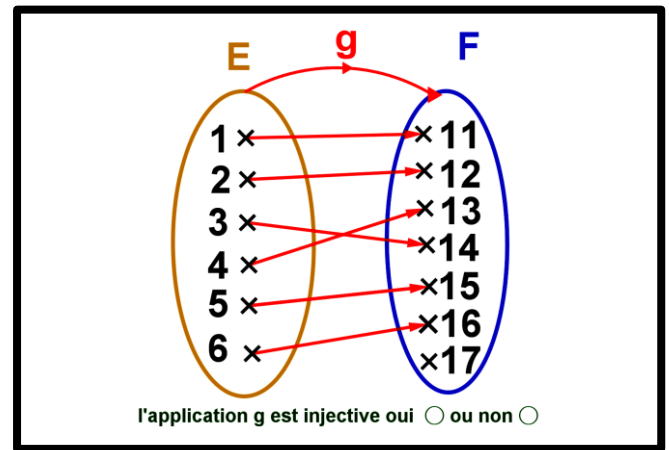
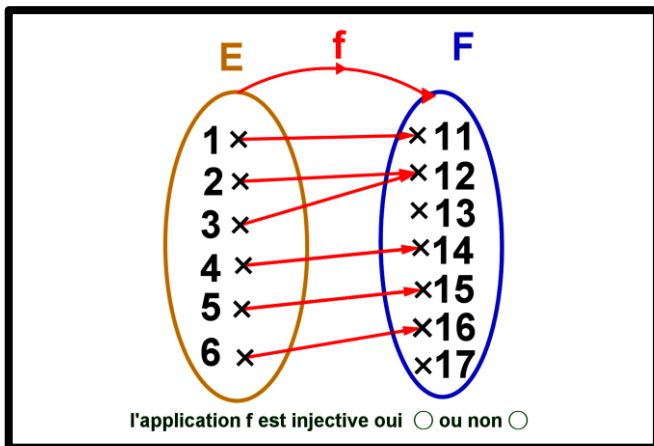
a. Définition :

$f : E \rightarrow F$ est une application .

f est appelée application injective (ou f est une injection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au plus un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore : (f est injective) $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

b. exemple : On considère les deux applications suivantes :



$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

c. Application : On considère l'applications :

$(x, y) \mapsto f((x, y)) = (x, 0)$

1. Est-ce que l'application f est injective ?

B. APPLICATION SURJECTIVE :

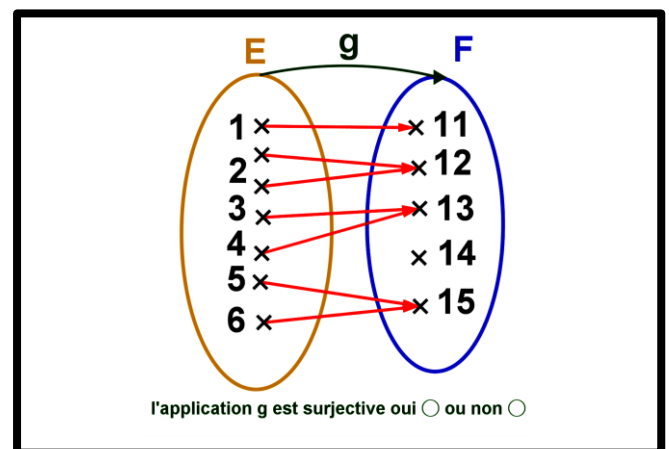
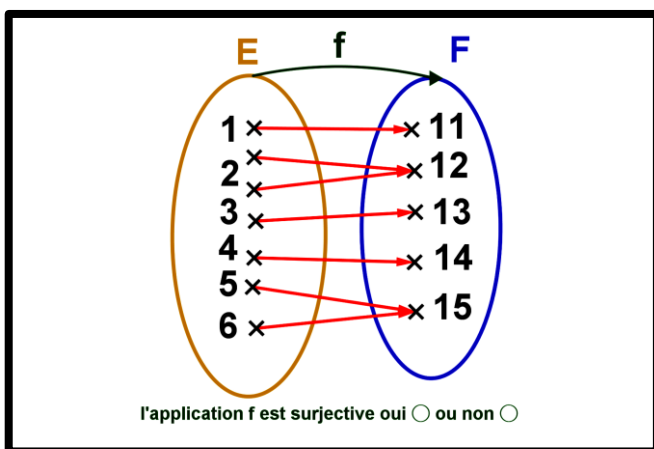
a. Définition :

$f : E \rightarrow F$ est une application .

f est appelée application surjective (ou f est une surjection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au moins un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore : (f est surjective) $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x))$

a. exemple : On considère les deux applications suivantes :



b. Remarque :

- Pour démontrer que f est surjective , il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet au moins une solution x

dans E pour tout y de F. (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F).

- (f est surjective) $\Leftrightarrow f(E) = F$.

c. Application :

❖ On considère l'application suivante : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = 3|x|$

1. Est-ce que f est surjective ?

2. Est-ce que g la restriction de f sur $[0, +\infty[$ surjective tel que : $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto g(x) = 3x|x+1| - 3x^2$?

❖ On considère l'application suivante : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f((x, y)) = (x, 0)$

1. Est-ce que f est surjective ?

❖ On considère l'application suivante : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$

1. Est-ce que f est surjective ?

C. APPLICATION BIJECTIVE L'APPLICATION RECIPROQUE :

a. Définition :

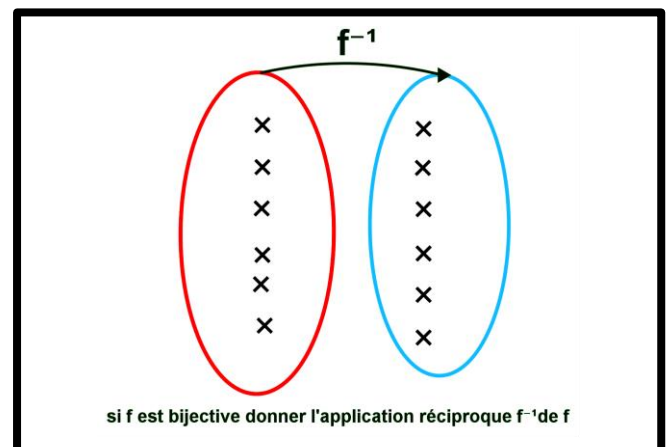
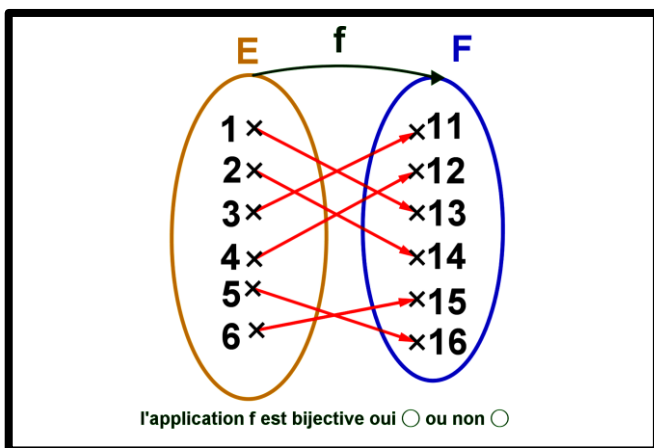
$f : E \rightarrow F$ est une application .

- f est appelée application bijective (ou f est une bijection) si et seulement si pour chaque élément y de F a un et un seul antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore : (f est bijective) $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x))$.

- L'application g de F vers E qui associe à chaque élément y de F par l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$ est appelée application réciproque de l'application f et on note $g = f^{-1}$

b. Exemple : On considère les deux applications suivantes :



b. Remarques :

- (f est une application bijective) \Leftrightarrow (f est injective et surjective) .

- L' application réciproque f^{-1} s'écrit de la façon suivante :

$f^{-1} : F \rightarrow E$

ou encore : $f^{-1} : F \rightarrow E$

$y \mapsto f^{-1}(y) = x$

ou encore :

$x \mapsto f^{-1}(x)$ (on utilise le variable x au lieu de y .

- Relation entre f et f^{-1} est : $\left. \begin{matrix} x = f(x) \\ x \in E \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{matrix} \right.$.
- Pour démontrer que f est bijective, il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet une solution unique x dans E pour tout y de F . (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F).

c. Application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- ❖ On considère l'application suivante : $x \mapsto f(x) = 3x - 2$

1. Est-ce que f est bijective ?

2. Si oui déterminer l'application réciproque f^{-1} de l'application f .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- ❖ On considère l'application suivante : $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$

1. Est-ce que f est surjective ?

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- ❖ On considère l'application suivante : $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$

1. Est-ce que f est bijective ?

2. Si oui déterminer l'application réciproque f^{-1} de l'application f .

III. COMPOSEE DES APPLICATIONS :

a. Définition :

On considère les deux applications : $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

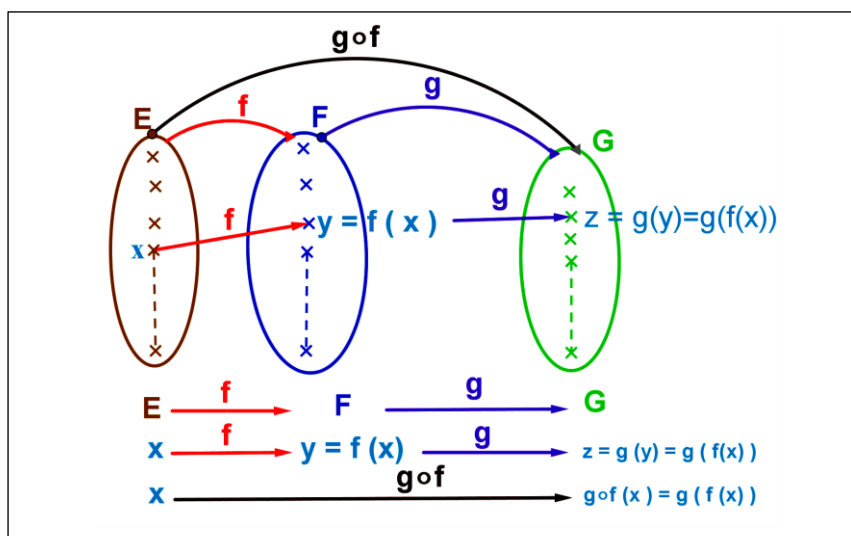
L'application $h : E \rightarrow G$ définie par : $\forall x \in E : h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée de f et g dans cet ordre, et on note par : $g \circ f$.

$$h = g \circ f : E \rightarrow G$$

Donc :

$$x \mapsto h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

b. Eclaircis:



c. Remarques :

- La composée de deux applications n'est pas toujours commutative : $f \circ g \neq g \circ f$ (en général)
- La composée des applications est associative ($f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ on peut écrire $f \circ g \circ h$

▪ f est une application bijective et f^{-1} l'application réciproque de f on a :

1. $\forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$ donc $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ (Id_F application identique sur F).

2. $\forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x$ donc $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ (Id_E application identique sur E).

3. Explication pour la dernière remarque :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ x \mapsto & f(x) = y & \mapsto & f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x & \end{array} \quad \text{donc } \forall x \in E : f^{-1}(f(x)) = x \text{ ou } f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f^{-1} \circ f = \text{Id}_E}$$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E & \xrightarrow{f} & F \\ y \mapsto & f^{-1}(y) = x & \mapsto & f(x) = f(f^{-1}(y)) = y & \end{array} \quad \text{donc } \forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x \text{ ou } f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ f^{-1} = \text{Id}_F}$$

d. Application :

❖ On considère les deux applications : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 4x^3 - 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

1. Déterminer : $g \circ f$ puis $f \circ g$.

❖ On considère l'application suivante :

$$f : [0; 2] \rightarrow [0; 2]$$

$$x \mapsto f(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$$

1. Montrer que f est une application bijective.

2. Calculer $f \circ f(x)$ puis on déduit l'application réciproque f^{-1} de l'application f .